

Aufgabe 1: Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (es sei $n \in \mathbb{N}$):

a) $0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$

b) $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

c) $2^n \left(\frac{x}{2}\right)^n x$

d) $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2n} \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2n}$

e*) $(a-b)^n + (b-a)^n$

f) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$

g) $e^{-x} e^{-x+2} e^{2x+3}$

h*) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$

i*) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$

Aufgabe 2: Zerlegen von Logarithmen

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Summe bzw. Produkt:

a) $\ln \sqrt{\frac{3x^2 \sqrt{y}}{2y^2 \sqrt{x}}}$

b) $\ln \frac{\sqrt[3]{4}}{v^2 - \omega^2}$

c) $\ln \sqrt[4]{c \sqrt[3]{b \sqrt{a}}}$

d*) $\ln (x^{\ln x})$

Aufgabe 3: Zusammenfassen von Logarithmen

Schreiben Sie als einen Logarithmus:

a) $2 \ln(u^2) + \frac{1}{2} \ln(u \cdot v) - 4 \ln\left(\frac{u}{v^2}\right)$

b) $\ln(a^2 b^2) - 2 \ln(a \cdot b^2)$

c*) $\frac{1}{3} \left[\ln a + \frac{1}{3} \ln(a-b) - 2 \left(\ln b + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \right) \right]$

Aufgabe 4: Polarkoordinaten

Stellen Sie folgende Punkte in Polarkoordinaten (r, ϕ) dar:

a) $P = (+1, +1)$

b) $P = (-1, -1)$

c*) $P = (4, -3)$

Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten folgender Punkte:

d) $r = 5 \quad \phi = 295^\circ$

e) $r = 7 \quad \phi = \frac{4\pi}{6}$

Aufgabe 5: Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag der Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

b) Normieren Sie die Vektoren \vec{a} bis \vec{c} .

c) Berechnen Sie mit den Vektoren \vec{a} bis \vec{c} :

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}), & \quad (\vec{a} - \vec{b}), & \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}), & \quad \vec{a} \times \vec{b}, \\ (\vec{a} + \vec{c}), & \quad (\vec{a} - \vec{c}), & \quad (\vec{a} \cdot \vec{c}), & \quad \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} ; \vec{a} und \vec{c} ?

e*) Wie lang ist die Projektion von \vec{a} auf \vec{b} ?

Aufgabe 6: Koordinatendarstellung von Vektoren

Schreiben Sie die folgenden Vektoren in Koordinatendarstellung ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ seien die drei kartesischen Basisvektoren):

a) $\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3$

b) $\vec{f} = \vec{e}_3$

c) $\vec{g} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 7(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

d*) $\vec{h} = 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3$

e*) $\vec{i} = 3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$

f*) $\vec{j} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$

Aufgabe 7: Abstand von Punkten

Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen den beiden Punkten:

a) $(4, 3); (-1, -4)$

b) $(6, -3); (-6, 1)$

c*) $(1, 2, 3); (4, 5, 6)$

Aufgabe 8*: Vektoren in komponentenfreier Darstellung

Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für Vektoren:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$